8. Лузина Т.В. Педагогические условия формирования познавательной активности студентов экономического факультета в системе высшего профессионального образования: дис. … канд. пед. наук: 13.00.08. Чебоксары, 2006.

9. Менджерицкая Д.В. Воспитателю о детской игре : пособие для воспитателя детского сада / под ред. Т.А. Марковой. М. : Просвещение, 1982.

10. Новикова Т.Г., Пинская М.А., Прутченков А.С., Федотова Е.Е. Портфолио в зарубежной образовательной практике // Вопросы образования. 2004. № 3.

11. Титова И.Н. Активизация учебной деятельности школьников на основе метода портфолио: дис. ... канд. пед. наук: 13.00.01. М., 2010.

12. Пейп Дж.С., Чошанов М.А. Учебные портфолио – новая форма контроля и оценки достижений учащихся // Директор школы. 2000. № 1. С. 75–82.

* * *

1. Baran O.V. Vozmozhnosti primenenija kejs-stadi v uchebnom processe // Vestnik MGLU. 2010. № 605.

2. Varganova G.V. Kejs-stadi kak metod nauchnogo issledovanija // Bibliosfera. 2006. № 2. S. 36–42.

3. Glebov A.A. K osnovanijam postroenija celostnoj sistemy pedagogicheskih sredstv // Izvestija Volgogr. gos. ped. un-ta. Ser.: Ped. nauki. 2007. № 4. S. 46–49.

4. Il'in V.S. O koncepcii celostnogo uchebno-vospitatel'nogo processa // Metodologicheskie osnovy sovershenstvovanija uchebno-vospitatel'nogo processa. Volgograd, 1981.

5. Kaunov A.M., Amerhanova A.A. Primenenie kejs-metoda v tehnologicheskom obrazovanii // Shkola i proizvodstvo. 2011. № 8. S. 8–9.

6. Kocharjan N.B. Sushhnostnye harakteristiki motivacii samostojatel'noj raboty shkol'nikov podrostkovogo vozrasta // Izvestija Volgogr. gos. ped. un-ta. Ser.: Ped. nauki. 2015. № 1 (96). S. 10–13.

7. Kocharjan N.B. Urovnevaja model' motivacii samostojatel'noj raboty shkol'nikov podrostkovogo vozrasta // Izvestija Volgogr. gos. ped. un-ta. Ser.: Ped. nauki. 2015. № 6 (101). S. 39–42.

8. Luzina T.V. Pedagogicheskie uslovija formirovanija poznavatel'noj aktivnosti studentov jekonomicheskogo fakul'teta v sisteme vysshego professional'nogo obrazovanija: dis. … kand. ped. nauk: 13.00.08. Cheboksary, 2006.

9. Mendzherickaja D.V. Vospitatelju o detskoj igre : posobie dlja vospitatelja detskogo sada / pod red. T.A. Markovoj. M. : Prosveshhenie, 1982.

10. Novikova T.G., Pinskaja M.A., Prutchenkov A.S., Fedotova E.E. Portfolio v zarubezhnoj obrazovatel'noj praktike // Voprosy obrazovanija. 2004. № 3.

11. Titova I.N. Aktivizacija uchebnoj dejatel'nosti shkol'nikov na osnove metoda portfolio: dis. ... kand. ped. nauk: 13.00.01. M., 2010.

12. Pejp Dzh.S., Choshanov M.A. Uchebnye portfolio – novaja forma kontrolja i ocenki dostizhenij uchashhihsja // Direktor shkoly. 2000. № 1. S. 75–82.

System of means of independent work motivation development of teenaged pupils

The author considers the selection and system construction of the pedagogic means of independent work motivationof teenaged pupils. The article deals with the influence of the system of means on the development of teenaged pupils' personal qualities.

Key words: *playing activities, case-study, portfolio, project work, principle, consistency, system of means.*

(Статья поступила в редакцию 18.01.2016)

А.В. БАТАЛАЕВ
(Элиста)

МЕТОД ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ТЕОРЕМ ГЕОМЕТРИИ В ОБУЧЕНИИ ШКОЛЬНИКОВ

Проверку на истинность утверждения теоремы удобно осуществить при помощи фигур с целочисленными сторонами. В учебниках и задачниках по геометрии много заданий, в которых длины сторон треугольника, трапеции выражаются целыми числами либо так называемыми «удобными» иррациональными множителями. В форме таблиц систематизированы треугольники, трапеции с целочисленными сторонами.

Ключевые слова: *целочисленное представление теорем, простые и составные числа, составление упражнений.*

Актуальность. Одна из образовательных целей изучения математики, в частности геометрии, состоит в том, чтобы научить школьников отличать, формулировать понятия, систематизировать их. Умение устанавливать причинно-следственные связи между двумя взаимосвязанными изменяемыми величинами (геометрическими понятиями) важно при изучении геометрии. Развитие воображения, умения наблюдать и анализировать явления, делать выводы, проводить сравнение происходит при работе с геометрическим материалом.

Традиционно в начальном курсе геометрии, берущем начало от Евклида, числовые параметры углов, сторон, расположение треугольника не указываются. Поэтому изображение треугольника на классной доске, а затем в тетрадях учащихся во многом задано случайным образом, поэтому учитель должен дополнительно указать их параметры.

Геометрию треугольника называют одной большой теоремой Пифагора. Поэтому геометрия треугольника – это, в первую очередь, геометрия целочисленных прямоугольных треугольников, длины сторон которых подчиняются формулам теоремы П. Ферма. В техническом черчении общепринятыми являются двухзначные и трехзначные числовые параметры: при воспроизведении чертежа на клетчатой бумаге целесообразно в первую очередь использовать пифагоровы тройки и четверки чисел, позволяющие задать координаты точек на чертеже в целых числах и обыкновенных дробях. Целочисленность сторон как в одних, так и в разных масштабных единицах является удобным инструментом при изготовлении стержневых моделей. При этом большой объём цифровых вычислений можно с успехом использовать в качестве проверки конкретных единиц математического знания.

Одним из направлений совершенствования обучения математики является усиление прикладной направленности. При ознакомлении учащихся с применением математики на практике не следует исключать из обучения элементы чистой математики. Задачи прикладного характера способствуют развитию творческих способностей учащихся, повышению их математической и общей культуры и являются хорошим средством связи теории и практики.

Часто, вводя новые понятия или изучая математические зависимости, приходится связывать их с имеющимися у детей представлениями, вызывать у них ассоциацию рассматриваемого математического факта с жизненным фактом. Степень понимания повышается, когда доказательству теоремы предшествует решение задач, рассмотрение свойств конкретных фигур. В этих случаях становится понятным необходимость доказательства, а иногда и самый ход доказательства. В школьных тетрадях полезно вводить понятие условной единицы для того, чтобы условный рисунок становился чертежом, в котором указан масштаб, как в учебниках географии или технологии.

В некоторых случаях для ознакомления с теоремой можно ограничиться так называемой численной проверкой данной теоремы на конкретной фигуре. Эту проверку на истинность утверждения теоремы удобно осуществить при помощи фигур с целочисленными сторонами. Отметим, что численная проверка теорем не может полностью заменить традиционного доказательства.

Хотя для понимания сущности теоремы нужно задать 5–6 опорных чертежей:

1) неправильные (разносторонние, неравнобедренные) треугольники;

2) равнобедренные (остроугольные, тупоугольные) треугольники;

3) прямоугольные треугольники.

Систематизация учебного материала осуществляется через такое его структурирование, когда учебная информация свертывается в компактные и обзорные формы. Свертывание учебного материала в компактные и обзорные формы создает возможность для обучаемых самостоятельно достраивать знания, достичь их системности.

Цель исследования: систематизировать геометрические фигуры с целочисленными сторонами и фиксированными углами в форме таблиц для дальнейшего их использования при численной проверке теорем и составлении практических заданий по геометрии.

Апробация и внедрение результатов исследования осуществлялись на занятиях со старшеклассниками Элистинской классической гимназии, в ходе занятий по математике с иностранными студентами факультета довузовской подготовки и обучения иностранных граждан КалмГУ. Кроме того, внедрение результатов проводилось на практических занятиях по дисциплинам «Математика», «Высшая алгебра и аналитическая геометрия» для студентов Калмыцкого государственного университета. Основные результаты исследования были обсуждены в выступлениях на научно-практических конференциях по УДЕ для учителей математики в г. Элисте.

В упражнении № 136 [2] стороны треугольника 12 см, 17 см и x см: а) составьте выражение для вычисления периметра этого треугольника; б) подумайте, каким может быть значение x и каким быть не может. Ясно, что x не может быть равен 29, т. е. сумме 12+17.

Но если ограничиться только прямоугольными треугольниками и считать, что длины сторон являются натуральными числами, то данное упражнение может стать основой классификации треугольников по теореме Ферма – Эйлера.

В учебниках и сборниках задач из пифагоровых треугольников чаще всего используются треугольники, длины сторон которых: 3, 4, 5; 5, 12, 13; 8, 15, 17; 7, 24, 25. Три значения гипотенузы – простые числа 5, 13, 17 вида 4k+1, т. е. при делении на 4 дают остаток 1. В 1642 г. П. Ферма установил факт, что такие числа разлагаются в сумму квадратов нечетного и четного чисел: $5=2^2+1^2$; $13=3^2+2^2$; $17=4^2+1^2$. Позднее данную теорему доказал Л. Эйлер методом бесконечного спуска [5]. Число 25 является квадратом простого числа 5 и также разлагается в сумму двух квадратов $25=4^2+3^2$. Из теоремы Ферма–Эйлера следует правило получения пифагоровых троек: $c=u^2+v^2$; $b=u^2-v^2$; $a=2uv$. Порядок в значениях катетов не существен, но очевидно, что b – нечетное число, c – четное число.

Особое место занимают тройки, у которых гипотенуза – составное число вида $(4k_1+1)(4k_2+1)$, в первой сотне это 65 и 85. Тогда они по тождеству Диофанта имеют два разложения в суммы двух квадратов и им соответствуют по две пифагоровых триады в первой сотне: $65=8^2+1^2=7^2+4^2$, $85=9^2+2^2=7^2+6^2$.

Каждый пифагоров треугольник различными способами можно достроить до целочисленного треугольника, у которого один из углов равен 45° или 135° (рис. 1). Причем длины их сторон и значения углов удобно выражаются при помощи параметров пифагорова треугольника.

Метрические и угловые характеристики данных треугольников вычисляются по формулам:

а) $a=2uv$, $b=u^2-v^2$, $c=u^2+v^2$; α, $90^\circ-\alpha$, 90°,

б) $a\sqrt{2}$, c, a+b; α, 45°, $135^\circ-\alpha$,

в) c, $b\sqrt{2}$, a+b; 45°, $90^\circ-\alpha$, $45^\circ+\alpha$,

г) b–a, c, $b\sqrt{2}$; $45^\circ-\alpha$, 45°, $90^\circ+\alpha$,

д) b–a, $a\sqrt{2}$, c; $45^\circ-\alpha$, α, 135°.

Выразим косинусы углов параметрами a, b, c:

$\cos\alpha=b:c$, $\cos(90^\circ-\alpha)=a:c$, $\cos(90^\circ+\alpha)=-\sin\alpha=-a:c$.

По рис. 1б:

$c^2=(a+b)^2+a^2-2(a+b)\sqrt{2}a\cdot\cos45^\circ=(a+b)^2+a^2-2a(a+b)$,

$(a+b)^2=2a^2+c^2-2\sqrt{2}ac\cdot\cos(135^\circ-\alpha)$,

$\cos(135^\circ-\alpha)=(2a^2+c^2-(a+b)^2):(2\sqrt{2}ac)=(2a^2-2ab):(2\sqrt{2}ac)=(a-b):(\sqrt{2}c)$.

По рис. 1г:

$c^2=(b-a)^2+2b^2-(b-a)\sqrt{2}b\cdot\cos45^\circ=(b-a)^2+2b^2-2b(b-a)$,

$(a+b)^2=2b^2+c^2-2\sqrt{2}bc\cdot\cos(45^\circ-\alpha)$,

$\cos(45^\circ-\alpha)=(c^2+2b^2-(b-a)^2):(2\sqrt{2}bc)=(2b^2+2ab):(2\sqrt{2}bc)=(a+b):(\sqrt{2}c)$.

По формулам приведения:

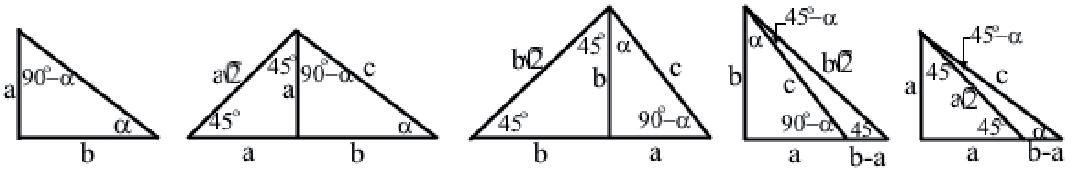
$\cos(45^\circ+\alpha)=\cos(180^\circ-135^\circ+\alpha)=-\cos(135^\circ-\alpha)=(b-a):(\sqrt{2}c)$.

Таким образом: $\cos(45^\circ-\alpha)=(a+b):(\sqrt{2}c)$, $\cos(135^\circ-\alpha)=(a-b):(\sqrt{2}c)$, $\cos(45^\circ+\alpha)=(b-a):(\sqrt{2}c)$.

Пусть гипотенуза равна $17=4^2+1^2$. Находим длины катетов $a=4^2-1^2=15$, $b=2\cdot4\cdot1=8$. Далее можно устно вычислить длины сторон остальных треугольников, значения косинусов их углов. После этого приближенно вычислить градусные меры углов.

Дополнением множества простых чисел вида 4k+1 являются и простые числа 4k+3, среди которых особо выделяются числа вида 6k+1, представимые как неполные квадраты суммы u^2+v^2+uv и разности u^2+v^2-uv. Первым таким числом является 7, разложение которого является прямым продолжением простого числа 5.

Каждое простое число вида 6k+1: 7, 13, 19, 31, 37, 43 и др. определяет наибольшую сторону целочисленного тупоугольного треугольника с углом C, равным 120°, у которого точка Торричелли находится в вершине C. Точ-



а б в г д

Рис. 1

кой Торричелли треугольника называется точка, сумма расстояний от которой до трех вершин наименьшая [6]. Простые числа 6k+1 и составные числа $(6k+1)^p$, где $p\in N$, представимы как неполные квадраты суммы m^2+n^2+mn. Составные числа вида $(6k_1+1)(6k_2+1)$ (в первой сотне это 91) имеют два разложения в неполные квадраты суммы.

Для тупоугольных треугольников с углом 120^o большую сторону вычислим по обобщенной теореме Пифагора: $c^2=a^2+b^2-2\cdot a\cdot b\cdot\cos120^o$, отсюда $c^2=a^2+b^2+ab$

$(m^2+n^2+mn)^2=(m^2-n^2)^2+(n^2+2mn)^2+$
$+(m^2-n^2)(n^2+2mn)$.

Тогда длины сторон треугольника с углом 120^o (рис. 2) вычисляются по формулам:

$$c=m^2+n^2+mn,\ a=n^2+2mn,\ b=m^2-n^2.$$

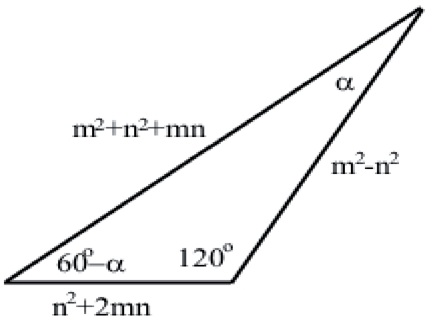


Рис. 2

Методом наложения двух тупоугольных треугольников получается равнобедренная трапеция. Тупоугольный треугольник с углом 120^o можно дополнить до равнобедренной трапеции тремя способами (рис. 3).

Зная метрические и угловые характеристики треугольника с углом 120^o, нетрудно вычислить характеристики двух треугольников с углами 60^o и трех равнобедренных трапеций. Углы треугольника с углом 60^o всегда составляют арифметическую прогрессию.

Формулы для вычисления длин сторон и значений углов треугольников, трапеций:

1) $a=n^2+2mn$, $b=m^2-n^2$, $c=m^2+n^2+mn$; α, $60^o-\alpha$, 120^o.

2) a, c, a+b; α, 60^o, $120^o-\alpha$.

3) b, c, a+b; $60^o-\alpha$, 60^o, $60^o+\alpha$.

4) a, b, a, a+b.

5) b, a, b, a+b.

6) c, a, c, b.

Косинусы углов полученных треугольников удобно выражаются параметрами *a, b, c.*

1) $c^2=a^2+b^2+ab$, тогда

$\cos\alpha=(b^2+c^2-a^2):(2ab)=$
$=(b^2+a^2+b^2+ab-a^2):(2ab)=(a+2b):(2c)$.

2) $c^2=(a+b)^2+a^2-2a(a+b)\cos60^o=$
$=(a+b)^2+a^2-a(a+b)$,

$\cos(120^o-\alpha)=[a^2+c^2-(a+b)^2]:(2ac)=$
$=(a^2-ab):(2ac)=(a-b):(2c)$.

3) По формулам приведения:

$\cos(60^o+\alpha)=\cos(180^o-120^o+\alpha)=$
$=-\cos(120^o-\alpha)=(b-a):(2c)$.

Таким образом: $\cos\alpha=(a+2b):(2c)$, $\cos(60^o-\alpha)=$ $=(2a+b):(2c)$, $\cos(120^o-\alpha)=(a-b):(2c)$, $\cos(60^o+\alpha)=$ $=(b-a):(2c)$.

Используя вышесказанное, мы составили табл. 1–2 (см. с. 62–64). В первой строке каждой ячейки табл. 2 указаны длины сторон, во второй – градусные меры углов, в третьей – значения косинусов (для треугольников).

Получили треугольники с большим разнообразием метрических и угловых характеристик. Данный результат можно использовать при составлении практических заданий по геометрии, а также для целочисленного представления теорем. Обращение к таблицам позволяет придать изучению математики большую конкретность, теоретическую значимость, а также повышает социальную значимость ма-

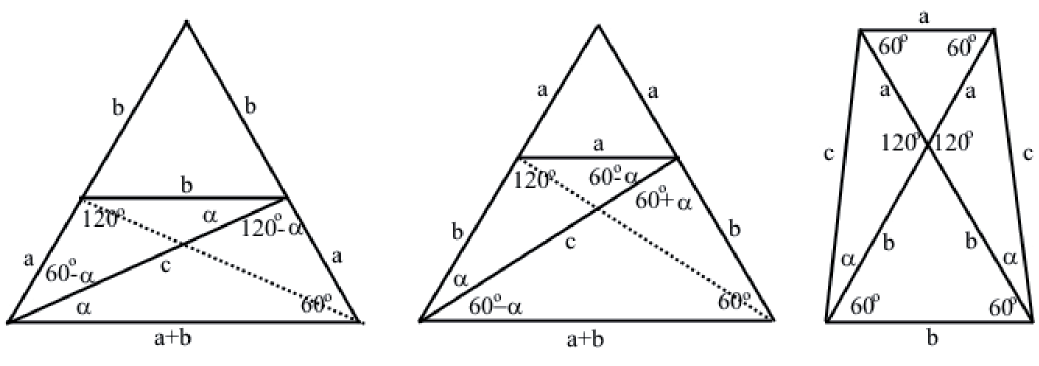


Рис. 3

Таблица 1

Классификация треугольников с углами 120°, 60° и трапеций

Число	Треугольники с углами 60°, 120°			Равнобедренные трапеции		
	длины сторон, углы, значения косинусов углов			длины сторон, длина диагонали		
$c=m^2+n^2+mn$ $a=n^2+2mn$ $b=m^2-n^2$	a; b; c α;60°−α;120° $\frac{a+2b}{2c}; \frac{2a+b}{2c}; -\frac{1}{2}$	a; c; a+b α; 60°;120°−α $\frac{a+2b}{2c}; \frac{1}{2}; \frac{a-b}{2c}$	b; c; a+b 60°−α;60°;60°+α $\frac{2a+b}{2c}; \frac{1}{2}; \frac{b-a}{2c}$	a,b,a,a+b c	b,a,b,a+b c	c,a,c,b a+b
$c=7=2^2+1^2+2\cdot1$ a=3 b=5	3;5;7 21,8°;38,2°;120° 13/14;11/14;−1/2	3;8;7 21,8°;60°;98,2° 13/14;1/2;−1/7	5;8;7 38,2°;60°;81,8° 11/14;1/2;1/7	3,5,3,8 7	5,3,5,8 7	7,3,7,4 8
$c=13=3^2+1^2+3\cdot1$ a=7 b=8	7;8;13 25,6°;34,4°;120° 23/26;11/13;−1/2	7;13;15 25,6°;60°;94,4° 23/26;1/2;−1/7	8;13;15 34,4°;60°;85,6° 11/13;1/2;7/26	7,8,7,15 13	8,7,8,15 13	13,7,13,8 15
$c=19=3^2+2^2+3\cdot2$ a=5 b=16	5;16;19 13,2°;46,8°;120° 37/38;13/19;−1/2	5;19;21 21,8°;60°;106,8° 37/38;1/2;−11/38	16;19;21 46,8°;60°;73,2° 13/19;1/2;11/38	5,16,5,21 19	16,5,16,21 19	19,5,19,16 21
$c=31=5^2+1^2+5\cdot1$ a=11 b=24	11;24;31 17,9°;42,1°;120° 59/62;23/31;−1/2	11;31;35 17,9°;60°;102,1° 59/62;1/2;−13/62	24;31;35 42,1°;60°;77,9° 23/31;1/2;13/62	11,24,11,35 31	24,11,24,35 31	31,11,31,24 35
$c=37=4^2+3^2+4\cdot3$ a=7 b=33	7;33;37 9,4°;50,6°;120° 73/74;47/74;−1/2	7;37;40 9,4°;60°;110,6° 73/74;1/2;−13/37	33,37,40 50,6°;60°;69,4° 47/74;1/2;13/37	7,33,7,40 37	33,7,33,40 37	37,7,37,33 40
$c=43=6^2+1^2+6\cdot1$ a=13 b=35	13;35;43 15,2°;44,8°;120° 83/86;61/86;−1/2	13;43;48 15,2°;60°;104,8° 83/86;1/2;−11/43	35;43;48 44,8°;60°;65,2° 61/86;1/2;23/98	13,35,13,48 43	35,13,35,48 43	43,13,43,35 48
$c=49=5^2+3^2+5\cdot3$ a=16 b=39	16;39;49 16,4°;43,6°;120° 121/122;37/61;−1/2	16;49;55 16,4°;60°;103,6° 121/122;1/2;−47/122	39;49;55 43,6°;60°;76,4° 37/61;1/2;47/122	16,39,16,55 49	39,16,39,55 49	49,16,49,39 55
$c=61=5^2+4^2+5\cdot4$ a=9 b=56	9;56;61 7,3°;52,7°;120° 61/67;109/134;−1/2	9;61;65 7,3°;60°;112,7° 61/67;1/2;−13/134	56;61;65 52,7°;60°;67,3° 37/61;1/2;47/122	9,56,9,65 61	56,9,56,65 61	61,9,61,56 65
$c=67=7^2+2^2+7\cdot2$ a=32 b=45	32;45;67 24,4°;35,6°;120° 61/67;109/134;−1/2	32;67;77 24,4°;60°;95,6° 61/67;1/2;−13/134	45;67;77 35,6°;60°;84,4° 109/134;1/2;13/134	32,5,32,77 67	45,32,45,77 67	67,32,67,45 77
$c=73=8^2+1^2+8\cdot1$ a=17 b=63	17;63;73 11,6°;48,4°;120° 143/146;97/146;−1/2	17;73;80 11,6°;60°;108,4° 143/146;1/2;−23/73	63;73;80 48,4°;60°;71,6° 97/146;1/2;23/73	17,63,17,80 73	63,17,63,80 73	73,17,73,63 80
$c=79=7^2+3^2+7\cdot3$ a=40 b=51	40;51;79 26°;34°;120° 71/79;131/158;−1/2	40;79;91 26°;60°;94° 71/79;1/2;−11/158	51;79;91 34°;60°;86° 131/158;1/2;13/134	40,51,40,91 79	51,40,51,91 79	79,40,79,51 91
$c=91=6^2+5^2+6\cdot5$ a=11 b=85	11;85;91 6°;54°;120° 181/182,107/182,−1/2	11;91;96 6°;60°;114° 181/182;1/2;−37/91	85;91;96 54°;60°;66° 107/182;1/2;37/91	11,85,11,96 91	85,11,85,96 91	91,11,91,85 96
$c=91=9^2+1^2+9\cdot1$ a=19 b=80	19;80;91 10,4°;49,6°;120° 179/182;59/91;−1/2	19;91;110 10,4°;60°;109,6° 179/182;1/2;−61/182	80;91;110 49,6°;60°;70,4° 59/91;1/2;61/182	19,80,19,99 91	80,19,80,99 91	91,19,91,80 99
$c=97=8^2+3^2+8\cdot3$ a=55 b=57	55;57;97 29,4°;30,6°;120° 169/194;167/194;−1/2	55;97;112 29,4°;60°;90,6° 169/194;1/2;−1/97	57;97;112 30,6°;60°;79,4° 167/194;1/2;1/97	55,57,55,112 97	57,55,57,112 97	97,55,97,57 112

Таблица 2

Метрические и угловые характеристики треугольников с углами 90°, 45°, 135°

$c=u^2+v^2$ $a=u^2-v^2$ $b=2uv$	a; b; c α; 90°−α; 90° $\frac{b}{c}$; $\frac{a}{c}$; 0	a√2; c; a+b α; 45°; 135°−α $\frac{b}{c}$; $\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\frac{\sqrt{2}(a-b)}{2c}$	c; b√2; a+b 45°; 90°−α; 45°+α $\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\frac{a}{c}$; $\frac{(b-a)\sqrt{2}}{2c}$	b−a; c; b√2 45°−α; 45°; 90°+α $\frac{\sqrt{2}(a+b)}{2c}$; $\frac{\sqrt{2}}{2}$; $-\frac{a}{c}$	b−a; a√2; c 45°−α; α; 135° $\frac{\sqrt{2}(a+b)}{2c}$; $\frac{\sqrt{2}}{2}$; $-\frac{a}{c}$
$c=5=2^2+1^2$ a=3 b=4	3; 4; 5 36,9°; 53,1°; 90° $\frac{4}{5}$; $\frac{3}{5}$; 0	3√2; 5; 7 36,9°; 45°; 98,1° $\frac{4}{5}$; $\frac{\sqrt{2}}{2}$; $-\frac{\sqrt{2}}{10}$	5; 4√2; 7 45°; 53,1°; 81,9° $\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\frac{3}{5}$; $\frac{\sqrt{2}}{10}$	1; 5; 4√2 8,1°; 45°; 126,9° $\frac{7\sqrt{2}}{10}$; $\frac{\sqrt{2}}{2}$; $-\frac{3}{5}$	1; 3√2; 5 8,1°; 36,9°; 135° $\frac{7\sqrt{2}}{10}$; $\frac{4}{5}$; $-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$c=13=3^2+2^2$ a=5 b=12	5; 12; 13 22,6°; 67,9°; 90° $\frac{12}{13}$; $\frac{5}{13}$; 0	5√2; 13; 17 22,6°; 45°; 106,9° $\frac{12}{13}$; $\frac{\sqrt{2}}{2}$; $-\frac{7\sqrt{2}}{26}$	13; 12√2; 17 45°; 67,4°; 67,6° $\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\frac{5}{13}$; $\frac{7\sqrt{2}}{26}$	7; 13; 12√2 22,4°; 45°; 112,6° $\frac{17\sqrt{2}}{24}$; $\frac{\sqrt{2}}{2}$; $-\frac{5}{13}$	7; 5√2; 13 22,4°; 22,6°; 135° $\frac{17\sqrt{2}}{24}$; $\frac{12}{13}$; $-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$c=17=4^2+1^2$ a=8 b=15	8; 15; 17 28,1°; 61,9°; 90° $\frac{15}{17}$; $\frac{8}{17}$; 0	8√2; 17; 23 28,1°; 45°; 106,9° $\frac{15}{17}$; $\frac{\sqrt{2}}{2}$; $-\frac{7\sqrt{2}}{34}$	17; 15√2; 23 45°; 61,9°; 73,1° $\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\frac{8}{17}$; $\frac{7\sqrt{2}}{34}$	7; 17; 15√2 16,9°; 45°; 118,1° $\frac{23\sqrt{2}}{34}$; $\frac{\sqrt{2}}{2}$; $-\frac{8}{17}$	7; 8√2; 17 16,9°; 28,1°; 135° $\frac{15}{17}$; $\frac{23\sqrt{2}}{34}$; $-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$c=25=4^2+3^2$ a=7 b=24	7; 24; 25 16,3°; 73,6°; 90° $\frac{24}{25}$; $\frac{7}{25}$; 0	7√2; 25; 31 16,3°; 45°; 118,7° $\frac{24}{25}$; $\frac{\sqrt{2}}{2}$; $-\frac{17\sqrt{2}}{50}$	25; 24√2; 31 45°; 73,6°; 61,3° $\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\frac{7}{25}$; $\frac{17\sqrt{2}}{50}$	17; 25; 24√2 28,7°; 45°; 106,3° $\frac{31\sqrt{2}}{50}$; $\frac{\sqrt{2}}{2}$; $-\frac{7}{25}$	7√2; 17; 25 16,3°; 28,7°; 135° $\frac{24}{25}$; $\frac{31\sqrt{2}}{50}$; $-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$c=29=5^2+2^2$ a=20 b=21	20; 21; 29 43,6°; 46,4°; 90° $\frac{21}{29}$; $\frac{20}{29}$; 0	20√2; 29; 41 43,6°; 45°; 91,4° $\frac{21}{29}$; $\frac{\sqrt{2}}{2}$; $-\frac{23\sqrt{2}}{74}$	29; 21√2; 41 45°; 46,4°; 88,6° $\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\frac{20}{29}$; $\frac{\sqrt{2}}{58}$	1; 29; 21√2 1,4°; 45°; 133,6° $\frac{47\sqrt{2}}{74}$; $\frac{\sqrt{2}}{2}$; $-\frac{20}{29}$	1; 20√2; 29 1,4°; 43,6°; 135° $\frac{47\sqrt{2}}{74}$; $\frac{21}{29}$; $-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$c=37=6^2+1^2$ a=12 b=35	12; 35; 37 18,9°; 71,1°; 90° $\frac{35}{37}$; $\frac{12}{37}$; 0	12√2; 37; 47 18,9°; 45°; 116,1° $\frac{35}{37}$; $\frac{\sqrt{2}}{2}$; $-\frac{23\sqrt{2}}{74}$	37; 35√2; 47 45°; 63,9°; 71,1° $\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\frac{12}{37}$; $\frac{23\sqrt{2}}{74}$	23; 37; 35√2 26,1°; 45°; 108,9° $\frac{47\sqrt{2}}{74}$; $\frac{\sqrt{2}}{2}$; $-\frac{12}{37}$	12√2; 23; 37 18,9°; 26,1°; 135° $\frac{47\sqrt{2}}{74}$; $\frac{35}{37}$; $-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$c=41=5^2+4^2$ a=9 b=40	9; 40; 41 12,7°; 77,3°; 90° $\frac{40}{41}$; $\frac{9}{41}$; 0	9√2; 41; 49 12,7°; 45°; 122,3° $\frac{40}{41}$; $\frac{\sqrt{2}}{2}$; $-\frac{31\sqrt{2}}{82}$	41; 49; 40√2 45°; 57,7°; 77,3° $\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\frac{31\sqrt{2}}{82}$; $\frac{9}{41}$	31; 41; 40√2 32,3°; 45°; 102,7° $\frac{49\sqrt{2}}{82}$; $\frac{\sqrt{2}}{2}$; $-\frac{9}{41}$	9√2; 31; 41 12,7°; 32,3°; 135° $\frac{40}{41}$; $\frac{49\sqrt{2}}{82}$; $-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$c=53=7^2+2^2$ a=28 b=45	28; 45; 53 31,9°; 58,1°; 90° $\frac{45}{53}$; $\frac{28}{53}$; 0	28√2; 53; 73 31,9°; 45°; 103,1° $\frac{45}{53}$; $\frac{\sqrt{2}}{2}$; $-\frac{17\sqrt{2}}{106}$	53; 45√2; 73 45°; 58,1°; 76,9° $\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\frac{28}{53}$; $\frac{17\sqrt{2}}{106}$	17; 53; 45√2 13,1°; 45°; 121,9° $\frac{73\sqrt{2}}{106}$; $\frac{\sqrt{2}}{2}$; $-\frac{28}{53}$	17; 28√2; 53 13,1°; 31,9°; 135° $\frac{73\sqrt{2}}{106}$; $\frac{45}{53}$; $-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$c=61=6^2+5^2$ a=11 b=60	11; 60; 61 10,4°; 79,6°; 90° $\frac{60}{61}$; $\frac{11}{61}$; 0	11√2; 61; 71 10,4°; 45°; 124,6° $\frac{60}{61}$; $\frac{\sqrt{2}}{2}$; $-\frac{49\sqrt{2}}{122}$	61; 71; 60√2 45°; 55,4°; 79,6° $\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\frac{49\sqrt{2}}{122}$; $\frac{11}{61}$	49; 61; 60√2 34,6°; 45°; 100,4° $\frac{71\sqrt{2}}{122}$; $\frac{\sqrt{2}}{2}$; $-\frac{11}{61}$	11√2; 49; 61 10,4°; 34,6°; 135° $\frac{60}{61}$; $\frac{71\sqrt{2}}{122}$; $-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$c=65=8^2+1^2$ a=16 b=63	16; 63; 65 14,3°; 75,7°; 90° $\frac{63}{65}$; $\frac{16}{65}$; 0	16√2; 65; 79 14,3°; 45°; 120,7° $\frac{63}{65}$; $\frac{\sqrt{2}}{2}$; $-\frac{47\sqrt{2}}{130}$	65; 79; 56√2 45°; 59,3°; 75,7° $\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\frac{47\sqrt{2}}{130}$; $\frac{16}{65}$	47; 65; 63√2 30,7°; 45°; 104,3° $\frac{39\sqrt{2}}{65}$; $\frac{\sqrt{2}}{2}$; $-\frac{16}{65}$	16√2; 47; 65 14,3°; 30,7°; 135° $\frac{63}{65}$; $\frac{39\sqrt{2}}{65}$; $-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$c=65=7^2+4^2$ a=33 b=56	33; 56; 65 30,5°; 59,5°; 90° $\frac{56}{65}$; $\frac{33}{65}$; 0	33√2; 65; 89 30,5°; 45°; 104,5° $\frac{56}{65}$; $\frac{\sqrt{2}}{2}$; $-\frac{23\sqrt{2}}{130}$	65; 56√2; 89 45°; 59,5°; 75,5° $\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\frac{33}{65}$; $\frac{23\sqrt{2}}{130}$	23; 65; 56√2 14,5°; 45°; 120,5° $\frac{89\sqrt{2}}{130}$; $\frac{\sqrt{2}}{2}$; $-\frac{33}{65}$	23; 33√2; 65 14,5°; 30,5°; 135° $\frac{89\sqrt{2}}{130}$; $\frac{56}{65}$; $-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$c=73=8^2+3^2$ a=48 b=55	48; 55; 73 41,1°; 48,9°; 90° $\frac{55}{73}$; $\frac{48}{73}$; 0	48√2; 73; 103 41,1°; 45°; 93,9° $\frac{55}{73}$; $\frac{\sqrt{2}}{2}$; $-\frac{7\sqrt{2}}{146}$	73; 55√2; 103 45°; 48,9°; 86,1° $\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\frac{55}{73}$; $\frac{7\sqrt{2}}{146}$	7; 73; 55√2 3,9°; 45°; 131,1° $\frac{103\sqrt{2}}{146}$; $\frac{\sqrt{2}}{2}$; $-\frac{48}{73}$	7; 48√2; 73 3,9°; 41,1°; 135° $\frac{103\sqrt{2}}{146}$; $\frac{55}{73}$; $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

Окончание табл. 2

$c=85=7^2+6^2$ $a=13$ $b=84$	13; 84; 85 8,8°; 81,2°; 90° $\frac{84}{85}; \frac{13}{85}; 0$	$13\sqrt{2}$; 85; 97 8,8°; 45°; 126,2° $\frac{84}{85}; \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{-71\sqrt{2}}{170}$	85; 97; $84\sqrt{2}$ 45°; 53,8°; 81,2° $\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{71\sqrt{2}}{170}; \frac{13}{85}$	71; 85; $84\sqrt{2}$ 36,2°; 45°; 98,8° $\frac{97\sqrt{2}}{170}; \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{-13}{85}$	$13\sqrt{2}$; 71; 85 8,8°; 36,2°; 135° $\frac{84}{85}; \frac{97\sqrt{2}}{170}; \frac{-\sqrt{2}}{2}$
$c=85=9^2+2^2$ $a=36$ $b=77$	36; 77; 85 25,1°; 74,9°; 90° $\frac{77}{85}; \frac{36}{85}; 0$	$36\sqrt{2}$; 85; 113 25,1°; 45°; 109,9° $\frac{77}{85}; \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{-41\sqrt{2}}{170}$	85; $77\sqrt{2}$; 113 45°; 64,9°; 70,1° $\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{36}{85}; \frac{41\sqrt{2}}{170}$	41; 85; $84\sqrt{2}$ 19,9°; 45°; 115,1° $\frac{113\sqrt{2}}{170}; \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{-36}{85}$	41; $36\sqrt{2}$; 85 19,9°; 25,1°; 135° $\frac{113\sqrt{2}}{170}; \frac{77}{85}; \frac{-\sqrt{2}}{2}$
$c=89=8^2+5^2$ $a=39$ $b=80$	39; 80; 89 26°; 64°; 90° $\frac{80}{89}; \frac{39}{89}; 0$	$39\sqrt{2}$; 89; 119 26°; 45°; 109° $\frac{80}{89}; \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{-41\sqrt{2}}{178}$	89; $80\sqrt{2}$; 119 34,6°; 45°; 100,4° $\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{39}{89}; \frac{41\sqrt{2}}{178}$	41; 89; $80\sqrt{2}$ 19°; 45°; 116° $\frac{119\sqrt{2}}{178}; \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{-39}{89}$	41; $39\sqrt{2}$; 89 19°; 26°; 135° $\frac{119\sqrt{2}}{178}; \frac{80}{89}; \frac{-\sqrt{2}}{2}$
$c=97=9^2+4^2$ $a=65$ $b=72$	65; 72; 97 25,5°; 64,5°; 90° $\frac{72}{97}; \frac{65}{97}; 0$	$65\sqrt{2}$; 97; 137 25,5°; 45°; 109,5° $\frac{72}{97}; \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{-7\sqrt{2}}{194}$	97; $72\sqrt{2}$; 137 45°; 64,5°; 70,5° $\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{65}{97}; \frac{7\sqrt{2}}{194}$	7; 97; $72\sqrt{2}$ 19,5°; 45°; 115,5° $\frac{137\sqrt{2}}{194}; \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{-65}{97}$	7; $65\sqrt{2}$; 97 19,5°; 25,5°; 135° $\frac{137\sqrt{2}}{194}; \frac{65}{97}; \frac{-\sqrt{2}}{2}$

тематического знания. Математическое знание персонализировано и построено на знаменитых теоремах, получивших общественное признание.

Существует ряд теорем, которые легко проверяются в целых числах, а самое главное – их чертеж выполняется на клетчатой бумаге с правильно выбранным масштабом. Учащиеся сами имеют возможность убедиться в правильности произведенных ими вычислений.

Правильность вычисления длин сторон трапеций можно проверить при помощи знаменитых теорем Птоломея, Эйлера, которые входят в профильный курс математики. Таким образом, стандартным заданиям придается характер персонализированной научности. «Имена только тогда значимы, когда они объясняют суть вещей» (Аристотель).

Теорема Птоломея. Сумма произведений противоположных сторон вписанного в окружность четырехугольника равна произведению диагоналей [6]. Равнобедренная трапеция будет всегда вписана в окружность, поэтому для нее будет выполняться эта метрическая теорема. Например: для трапеций со сторонами 3, 5, 3, 8 и 5, 3, 5, 8: $\Sigma_1=3\cdot8+5\cdot5=7\cdot7$, $\Sigma_2=3\cdot8+5\cdot5=7\cdot7$.

Теорема Эйлера. Сумма квадратов сторон вписанного четырехугольника равна сумме квадратов диагоналей плюс учетверенный квадрат отрезка, соединяющего середины диагоналей. Поэтому для трапеции со сторонами 3,5,3,8: $\Sigma=3\cdot3+5\cdot5+3\cdot3+8\cdot8=2\cdot49+4((8-5):2)^2=$ $=2\cdot7^2+9^2=107$.

В обучении математике оптимальной для понимания сущности задач и развития умений является процедура составления системы взаимосвязанных в информационном плане задач. Объединение знаний в рамках одного занятия в системе информационно-взаимосвязанных задач на основе целочисленного представления теорем дает возможность с самого начала рассматривать сходство и различие геометрических задач разного вида, овладевать надежными приемами их дифференцирования, сравнивать их в пределах единого укрупненного задания.

При составлении новой задачи совершаются важные логические операции по замене понятий, замене роли числа, изменению вопроса к задаче.

П р и м е р ы   с о с т а в л е н и я   з а д а ч

1. Основания равнобедренной трапеции равны 5 и 21, а боковая сторона равна 16. Найдите длину диагонали трапеции (см. рис. 4).

Решение. Проведем высоты BH_1, CH_2 к основанию AD, получим прямоугольник BH_1H_2C, т. к. $BC\|HH_1$, $BH_1\|CH_2$ (две прямые перпендикулярны третьей прямой). Тогда $BC=H_1H_2=5$. Прямоугольные треугольники ABH_1 и CH_2D равны по гипотенузе и катету. Следовательно, $AH_1=H_2D=(21-5):2=8$. В прямоугольном треугольнике CDH_1 катет H_1D равен половине гипотенузы CD, поэтому угол CDH равен 30°. Углы B и C равны (по 120°), как углы при основании. Находим диагональ

AC по теореме косинусов: $AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos B=25+256+5\cdot16=361$; $AC=19$.

Ответ: 19.

Проверка по теореме Птоломея:
$5\cdot21+16\cdot16=19\cdot19$; $105+256=361$; $361=361$.

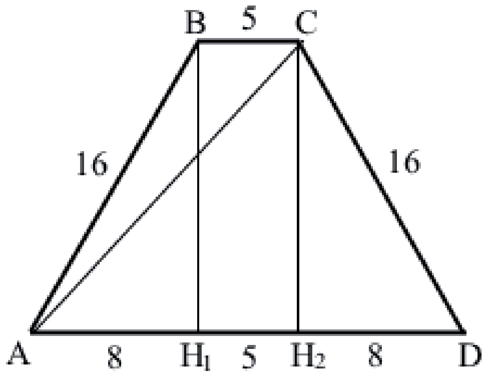


Рис. 4

2. Вычислить косинусы углов треугольника и найти приближенные значения углов по таблице Брадиса, если известны длины всех его сторон: $a=33$, $b=37$, $c=40$.

Ответ: 47/74; 1/2; 13/37; 50,6°; 60°; 69,4°.

3. Найти третью сторону треугольника, если известны две стороны и косинус угла между ними: $a=41$, $b=49$, $\cos\gamma=9/41$.

Ответ: $40\sqrt{2}$.

Фундаментальность в выборе числовых параметров заключается в их логической обоснованности, которая становится существенной деталью знания.

Правильность выполнения действий можно проверить, построив чертеж на клетчатой бумаге. Построение точного чертежа геометрической задачи – самый быстрый способ установления ошибки в ее условии [1]. Для данных задач можно быстро и легко построить чертеж, поскольку стороны выражаются целыми числами или «удобными» иррациональными множителями и один из углов фиксирован. Эффективность использования чертежа будет тем выше, чем аккуратнее он составлен, чем точнее выдержаны величины углов [4]. Правильно выполненный чертеж приучает учеников в планиметрических чертежах видеть соотношение элементов фигуры и способствует развитию глазомера.

Конечно, аккуратная отделка чертежа требует большего времени. Но практика показывает, что учащиеся, от которых систематически требовали аккуратных чертежей, сравнительно быстро приобретают нужные навыки и начинают хорошо работать без излишней затраты времени.

Наглядность является не самоцелью, а дидактическим средством, помогающим развитию абстрактного мышления. Отсутствие наглядности может привести к преобладанию в сознании и памяти ученика только словесных выражений математических фактов, а это ведет к формализму. Наглядность как дидактическое средство нужна везде, где формируются новые понятия, независимо от возраста учащихся.

Выполнение практических заданий на занятиях по геометрии способствует активизации познавательной деятельности учащихся. И несмотря на то, что, выполняя такие задания, учащиеся имеют возможность делать только частные и ограниченные выводы, тем не менее эти выводы делаются ими самостоятельно, благодаря чему практическую работу можно считать одним из эффективных методов обучения.

Решение задачи с «хорошими» числами облегчает части учащихся понимание содержания задачи, проведение анализа ее решения и, следовательно, отыскание решения. Полуписьменное решение примеров (с возможно меньшим числом записей) приучает учащихся не только выполнять указанные в примере действия, но и отыскивать рациональные пути решения, развивает навыки устного счета.

Полученные результаты и выводы. Навыки геометрических построений заметно улучшились, учащиеся свободнее стали пользоваться чертежными инструментами. Возросли возможности обучения слабых учащихся при изучении геометрии, поскольку геометрические понятия и факты отрабатываются практически. Выбор более удобных числовых параметров способствовал развитию вычислительных навыков, т. к. вычисления не слишком громоздки и их можно провести устно или полуписьменно.

Практические задания по геометрии способствовали повышению интереса к учебе, уровня знаний, умений и навыков по геометрии. Мы считаем, что метод целочисленного представления теорем геометрии соответствует веяниям времени, оптимизирует и конкретизирует процесс обучения геометрии в средней школе.

Список литературы

1. Дегтянникова И.Н. Остроугольный или тупоугольный? // Математика в школе. 1998. № 5. С. 43–44.

2. Математика. 6 класс: учебник для общеобразоват. учреждений / Н.Я. Виленкин, В.И. Жохов, А.С. Чесноков, С.И. Шварцбурд. 25-е изд., стер. М.: Мнемозина, 2009.
3. Понарин Я.П. Элементарная геометрия: в 2 т. Т. 1: Планиметрия, преобразования плоскости. М.: МЦНМО, 2004.
4. Рисунок в школьном курсе геометрии // Математика в школе. 2010. № 5. С. 46–53.
5. Спивак А.В. Арифметика-2. М.: Бюро «Квантум», 2008. Вып. 109. Приложение к журналу «Квант» № 5/2008.
6. Чичигин В.Г. Методика преподавания геометрии. М.: Учпедгиз, 1959.

* * *

1. Degtjannikova I.N. Ostrougol'nyj ili tupougol'nyj? // Matematika v shkole. 1998. № 5. S. 43–44.
2. Matematika. 6 klass: uchebnik dlja obshheobrazovat. uchrezhdenij / N.Ja. Vilenkin, V.I. Zhohov, A.S. Chesnokov, S.I. Shvarcburd. 25-e izd., ster. M.: Mnemozina, 2009.
3. Ponarin Ja.P. Jelementarnaja geometrija: v 2 t. T. 1: Planimetrija, preobrazovanija ploskosti. M.: MCNMO, 2004.
4. Risunok v shkol'nom kurse geometrii // Matematika v shkole. 2010. № 5. S. 46–53.
5. Spivak A.V. Arifmetika-2. M.: Bjuro «Kvantum», 2008. Vyp. 109. Prilozhenie k zhurnalu «Kvant» № 5/2008.
6. Chichigin V.G. Metodika prepodavanija geometrii. M.: Uchpedgiz, 1959.

Method of integer representation of geometry theorems in teaching pupils

A theorem may be proved by means of using figures with integer sides. In textbooks there are a lot of tasks in which the length of triangle and trapezoid sides are estimated by integer numbers of the so called "suitable" irrational multipliers. The triangles, trapezoids with integer sides are systematized in the forms of tables.

Key words: *integer representation of theorems, elementary and compound numbers, tasks making.*

(Статья поступила в редакцию 18.01.2016)

В.И. СЛОБОДЧИКОВ
(Омск)

ПРАВОСЛАВНАЯ ПСИХОЛОГИЯ – ПСИХОЛОГИЯ ПУТИ ЧЕЛОВЕКА*

(Часть вторая)

Рассмотрены мировоззренческие и теоретико-методологические основания христианской психологии в системе психологического знания. Предложен общенаучный – гуманитарно-антропологический подход к изучению человеческой реальности, предполагающий гармонизацию и синтез трех антропологий: педагогической, психологической и христианской. В свете антропологического единства следует различать три типа психологического знания: психологию психики, психологию человека и православную (христианскую) психологию – психологию пути человека. Смыслообразующим центром становления «собственно человеческого в человеке» является его выход на личностный способ бытия в мире.

Ключевые слова: *антропологический кризис, расчеловечивание человека, грех рационализма, антропологическое единство, духовное становление, путь личности, психология пути.*

В первой части** исследования проблем православной психологии – области ее существования, мировоззренческих и методологических регулятивов ее построения как системы рационального знания – было выявлено, что важнейшей предпосылкой самой возможности такой психологии является *антропологическое единство* православия, педагогики и психологии. Именно в рамках этого единства может быть обустроена подлинная *антропопрактика* – как практика вочеловечивания человека, как практика его всестороннего развития во всех его духовно-душевно-телесных измерениях; человека как жизнеспособного *индивида*, как *субъекта* собственной жизни и деятельности, как *личности* во встрече с Други-

* Работа подготовлена в рамках проекта «Современная западная психология религии: адаптация в российском контексте» (грант РНФ 14-18-03771, организация – адресат финансирования – ПСТГУ).

** Данный текст является продолжением первой статьи «В поисках оснований христианской психологии», опубликованной в № 1(105) журнала «Известия Волгоградского государственного педагогического университета» за 2016 г.